

Документ подписан простой электронной подписью  
 Информация о владельце:  
 ФИО: Косенок Сергей Михайлович  
 Должность: ректор  
 Дата подписания: 18.06.2024 12:44:57  
 Уникальный программный идентификатор:  
 e3a68f3eaa1e62674b54f4998099d3d6bfdfc836

**Оценочные средства для промежуточной аттестации по дисциплине**

**Теоретическая механика и механика сплошной среды, 4 семестр**

Код, направление подготовки	03.03.02 Физика
Направленность (профиль)	Цифровые технологии в геофизике
Форма обучения	очная
Кафедра-разработчик	Кафедра экспериментальной физики
Выпускающая кафедра	Кафедра экспериментальной физики

Типовые задания для контрольной работы:

**РАЗДЕЛЫ I – VII**

1. Записать преобразование поворота  $\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \vec{r} + \delta\vec{\varphi} \times \vec{r}$  в матричной форме. Используйте

следующие обозначения:  $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ,  $\delta\vec{\varphi} = \begin{pmatrix} \delta\varphi_x \\ \delta\varphi_y \\ \delta\varphi_z \end{pmatrix}$ . Каковы свойства матрицы

(инфинитезимальных) поворотов?

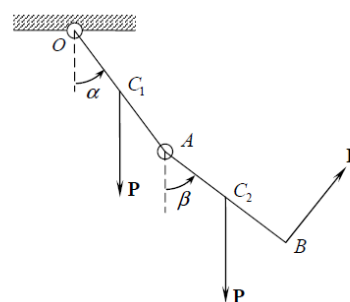
2. Покажите, что последовательное выполнение двух инфинитезимальных преобразований поворота на углы  $\delta\vec{\varphi}_1$  и  $\delta\vec{\varphi}_2$  представляет собой также поворот и найдите соответствующий ему угол, а также направление оси поворота.
3. Рассмотрите коммутатор двух преобразований поворота на углы  $\delta\vec{\varphi}_1$  и  $\delta\vec{\varphi}_2$ . Коммутатор представляет собой **разность** двух последовательных преобразований, производимых в разной последовательности. Покажите, что коммутатор отличен от нуля и представляет собой бесконечно малый поворот более высокого (второго) порядка. Найдите угол этого поворота.
4. На плоскости  $XU$  задан вектор  $\vec{V} = (ax + by, cx + dy)$ , где  $a, b, c$  и  $d$  – постоянные. Доказать, что вектор  $\vec{V}$  есть линейная комбинация векторов  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$  и  $\vec{t} = y\vec{i} - x\vec{j}$  с постоянными коэффициентами. Используйте ортогональность векторов  $\vec{r}$  и  $\vec{t}$ , а также то, что матрица  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , определяющая вектор  $\vec{V}$ , является ортогональной с точностью до множителя. Найдите указанные коэффициенты.
5. Покажите, что: а)  $(\vec{A} - \vec{B}) \times (\vec{A} + \vec{B}) = 2\vec{A} \times \vec{B}$ ; б)  $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = |\vec{A}|^2 |\vec{B}|^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2$ ;
- а. с)  $(\vec{A} \times \vec{B}) \times (\vec{C} \times \vec{D}) = 0$ , если четыре вектора  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ , и  $\vec{D}$  лежат в одной плоскости.

6. Вектор  $\vec{D}$  является линейной комбинацией трёх не ортогональных и некопланарных векторов:  $\vec{D} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{B} + \gamma\vec{C}$ . Показать, что коэффициенты разложения  $\alpha, \beta, \gamma$  определяются соотношениями:  $\alpha = \frac{\vec{D} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})}{\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})}$ , и т.д.
7. Показать, что  $(\vec{A} \times \vec{B}) \times (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{D}))\vec{C} - (\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}))\vec{D}$ . Как объяснить отсутствие в этом выражении симметрии между векторами  $\vec{A}$  и  $\vec{B}$  с одной стороны, и  $\vec{C}$  и  $\vec{D}$  с другой?
8. Показать, что  $\vec{A} \times (\vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{D})) = (\vec{A} \times \vec{C})\vec{B} \cdot \vec{D} - (\vec{A} \times \vec{D})\vec{B} \cdot \vec{C}$ .
9. Укажите, как алгебраически, используя линейные комбинации, из трёх не ортогональных векторов  $\vec{A}, \vec{B}$  и  $\vec{C}$  (считая их известными) получить три ортогональных вектора  $\vec{A}', \vec{B}'$  и  $\vec{C}'$ . Найти коэффициенты разложений штрихованных векторов по «нештрихованному». Является ли процедура ортогонализации однозначной?
10. Найти траекторию, скорость и ускорение материальной точки, если закон движения имеет вид  $x = a \cos \omega t, y = b \sin \omega t, z = 0$ , где  $a, b, \omega = \text{const}$ . Траектории изобразить в пространстве.
11. Определить период одномерного движения частицы массы  $m$  с энергией  $E$  в потенциальном поле вида  $U = -\frac{U_0}{\text{ch}^2 \alpha x}$ , ( $-U_0 < E < 0$ ).
12. Найти траекторию заряженной частицы с массой  $m$  и зарядом  $q$  в электрическом поле напряженности  $\vec{E}$ , если при  $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 2$ . скорость частицы равна  $\vec{V}_0$ , причем  $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos \omega t$ , а  $\vec{V}_0$  перпендикулярно  $\vec{E}_0$ .
13. Проинтегрировать уравнения движения материальной точки массы  $m = 1$  в поле  $U(r) = 1/2r^2$ , для  $E > 0$ .
14. Найти закон движения частицы в поле  $U(x) = -Ax^4$ , если энергия ее равна нулю.
15. Найти ускорение материальной точки, движущейся по траектории  $\rho = \rho_0 e^{-\lambda \phi}, z = 0$ , если секторная скорость (то есть площадь, «заметаемая» радиус-вектором точки в единицу времени)  $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$  относительно начала координат. Параметры  $\rho_0, \lambda, \sigma_0$  траектории считать известными. Вектор ускорения представить как функцию расстояния  $\rho$  до начала координат.
16. Указать условия финитности движения, найти точки поворота и период колебаний для материальной точки массы  $m = 1$  в поле:  $U(x) = x^2$ .
17. Тело массы  $m$  движется по закону  $x = a \cos \omega t, y = b \sin \omega t$ . Определить силу, действующую на частицу в каждой точке траектории.
18. Точка массой  $m$  движется по спирали Архимеда, в полярной системе координат имеющей вид  $\rho = At, \phi = Bt$ . Найти действующую на точку силу – ее проекции и модуль.
19. Проинтегрировать уравнение движения материальной точки массы  $m = 2$ , движущейся в поле  $U = -\text{tg}^2 x$ , если при  $t = 0, x = 0, \dot{x} = 2$ .
20. Точка движется в плоскости так, что ее секторная скорость  $\sigma_z = k\rho^2/2$ , а угол между ускорением и радиусом-вектором точки постоянен и равен  $\pi/4$ . Найти закон движения и уравнение траектории точки, если  $\rho(0) = 0, \phi(0) = 0$  и  $\dot{\rho}(0) = \dot{\rho}_0$ .

21. Найти точки поворота и исследовать характер движения материальной точки массы  $m = 1$ , движущейся в поле:  $U(r) = \frac{1}{2}r^2$
22. Найти точки поворота и исследовать характер движения материальной точки массы  $m = 1$ , движущейся в поле:  $U(r) = \left(\frac{1}{r^2} + r^2\right)\frac{1}{2}$
23. Найти точки поворота и исследовать характер движения материальной точки массы  $m = 1$ , движущейся в поле:  $U(r) = 1/r^4$ .
24. Определить траекторию частицы в поле  $U(r) = \frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{r^2}$ . Найти время падения частицы в центр поля с расстояния  $r_0$ . Сколько оборотов вокруг центра сделает при этом частица?

25. Найти точки поворота и исследовать характер движения материальной точки массы  $m = 1$ , движущейся в поле:  $U(r) = -\alpha^2 / 2r^2$ ,  $\alpha = const$ .

26. Двойной маятник, состоящий из двух однородных стержней массы  $m$  и длины  $\ell$  каждый, может совершать движение в вертикальной плоскости (в точках  $A$  и  $O$  — цилиндрические шарниры). Помимо силы тяжести, действующей на стержни, к точке  $B$  стержня  $AB$  приложена постоянная по величине перпендикулярная к стержню сила  $F$  (см. рисунок). Определить положения равновесия.



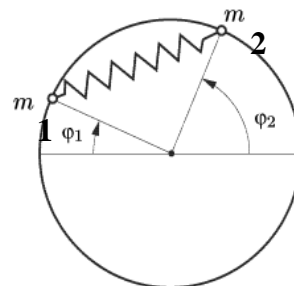
27. Однородный стержень  $AB = \ell$  может двигаться в вертикальной плоскости  $XOY$  так, что конец  $A$  скользит по прямой  $OY$ , а конец  $B$  — по кривой  $y = f(x)$ . Плоскость  $XOY$  вращается с постоянной угловой скоростью  $\Omega$  вокруг вертикальной оси  $OY$ . Трение в системе отсутствует. Какой должна быть функция  $f(x)$ , чтобы любое положение стержня было положением относительного равновесия, если  $f(0) = 0$ ?

28. Мотоциклист увеличивает свою скорость сначала с 55 до 60 км/ч, а затем с 60 до 65 км/ч. Сравнить величины совершаемой при этом работы.

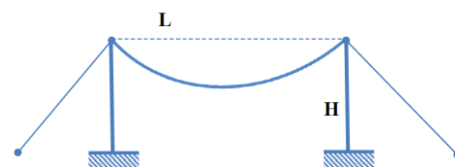
29. Каждый элемент бесконечно тонкого однородного неподвижного обруча радиуса  $R$  и общей массы  $M$  притягивает материальную точку  $P$ , лежащую на перпендикуляре к плоскости обруча, проходящем через его центр  $O$ . Силы притяжения описываются законом всемирного тяготения. Определить скорость, с которой материальная точка  $P$  пересечет плоскость обруча, если в начальный момент расстояние  $OP$  было равно  $l$ , а точка покоилась.

30. Однородную цепочку держат за верхний конец так, что нижним концом она касается стола, а затем отпускают. Показать, что в процессе падения цепочки сила давления на стол превышает вес лежащей на столе части цепочки в три раза.

31. Две точечные массы  $m_1$  и  $m_2$  (см. рисунок), связанные пружиной жесткости  $k$ , могут двигаться без трения, по неподвижному кольцу радиуса  $r$ , лежащему в горизонтальной плоскости. Длина пружины в недеформированном состоянии равна  $l$ . Составить уравнения Лагранжа. Используя аналогию с поступательным движением системы двух тел, определить новые обобщенные координаты и найти закон движения в квадратурах.

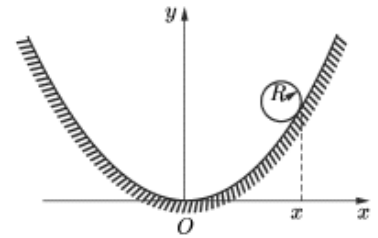


32. Определить форму кривой, которую приобретает нерастяжимая нить массы  $M$  и длины  $l$ , закреплённая



на двух вертикальных опорах (см. рисунок). Как следует ориентировать боковые растяжки, чтобы моменты сил реакций, действующих на опоры, были равны нулю? Предельно допустимая сила натяжения растяжек равна  $F$ , а расстояние между опорами –  $L$ .

33. Однородный диск радиуса  $R$  и массы  $m$  (см. рисунок) может катиться без проскальзывания по параболе  $y = ax^2/2$ . Ось  $OY$  вертикальна,  $Ra \leq 1$ . Составить функцию Лагранжа, приняв за обобщенную координату абсциссу  $x$  точки касания. Получить уравнения Лагранжа.

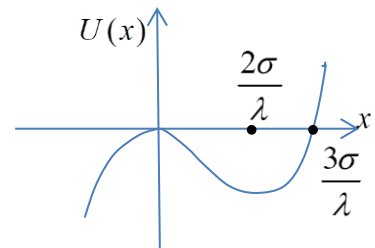


34. Шарнирно закреплённая за один конец спицы массы  $M$  может свободно вращаться в горизонтальной плоскости без трения. На спицу надета лёгкая пружина и бусинка массы  $m$ , прикреплённая к одному концу пружины. Вторым концом пружины прикреплен к шарниру. В начальный момент пружина не натянута. Резким толчком спице сообщают угловую скорость  $\omega_0$ . Получить уравнения Эйлера – Лагранжа для этой системы. Описать движение бусинки и спицы. Длина ненапрянутой пружины равна  $l_0$ .

35. Потенциальная энергия частицы  $U(x) = -\frac{\sigma x^2}{2} + \frac{\lambda x^3}{3!}$ .

Начальные условия:  $\dot{x}(0) = 0$ ,  $x(0) = A$ ,  $A = \frac{3\sigma}{\lambda}$ . Найти

решение  $x(t)$  уравнений движения.



36. Космический аппарат находится на круговой орбите радиуса  $r_0$ . Найти величину тангенциального приращения скорости  $\delta v$  для перехода на эллиптическую орбиту с полуосью  $a > r_0$  и время перелёта до апогея новой орбиты.
37. Найти скорость частицы после упругого столкновения с плоскостью, движущейся поступательно с постоянной скоростью. Ориентация плоскости и направления скоростей частицы и плоскости до столкновения произвольны.
38. Две точечные массы  $m_1$  и  $m_2$ , связанные пружиной жесткости  $k$ , могут двигаться без трения по сторонам прямого угла  $\angle XOY$ , сторона  $OY$  которого вертикальна. Длина пружины в ненапряжённом состоянии равна  $l_0$ . Ускорение свободного падения равно  $g$ . Составить уравнения Лагранжа.
39. Жёсткая проволока согнута в форме параболы. На проволоку надета бусинка массы  $M$ . Парабола ориентирована вертикально в поле тяжести, так что бусинка может свободно перемещаться по проволочке, совершая колебания. Проволочку приводят во вращение относительно (вертикально расположенной) оси симметрии параболы с угловой скоростью  $\omega$ . Записать функцию Лагранжа и получить уравнения движения.
40. Найти решение уравнений движения маятника Фуко в окрестности положения равновесия. Указание: функция Лагранжа, записанная во вращающейся с угловой скоростью  $\vec{\Omega}$  системе координат, имеет вид:  $L = \frac{m(\vec{v} + \vec{\Omega} \times \vec{r})^2}{2} + m\vec{g} \cdot \vec{r}$ .

## РАЗДЕЛ I

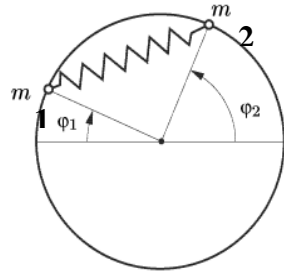
(Методы описания движений, кинематика)

1. Найти траекторию, скорость и ускорение материальной точки, если закон движения имеет вид  $x = a \cos \omega t$ ,  $y = b \sin \omega t$ ,  $z = 0$ , где  $a, b, \omega = \text{const}$ . Траектории изобразить в пространстве.
2. Найти ускорение материальной точки, движущейся по траектории  $\rho = \rho_0 e^{-\lambda \varphi}$ ,  $z = 0$ ; если секторная скорость  $\vec{\sigma} = \vec{\sigma}_0 = \text{const}$  относительно начала координат. Параметры траектории считать известными. Вектор ускорения представить как функцию расстояния до начала отсчета.
3. Точка массой  $m$  движется по спирали Архимеда, в полярной системе координат имеющей вид  $\rho = At$ ,  $\varphi = Bt$ . Найти действующую на точку силу – ее проекции и модуль.
4. Точка движется в плоскости так, что ее секторная скорость  $\sigma_z = k\rho^2/2$ , а угол между ускорением и радиусом-вектором точки постоянен и равен  $\pi/4$ . Найти закон движения и уравнение траектории точки, если  $\rho(0) = 0$ ,  $\varphi(0) = 0$  и  $\dot{\rho}(0) = \dot{\rho}_0$ .
5. Тело массы  $m$  движется по закону  $x = a \cos \omega t$ ,  $y = b \sin \omega t$ . Определить силу, действующую на частицу в каждой точке траектории.

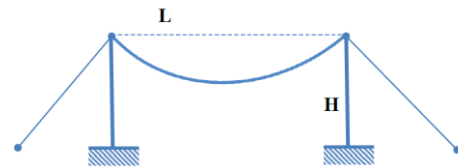
## РАЗДЕЛ II

(Принцип наименьшего действия и основная задача механики)

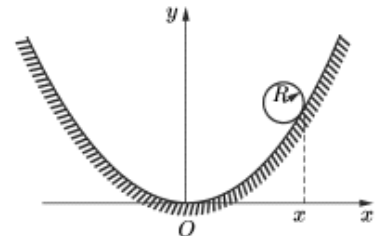
1. Две точечные массы  $m_1$  и  $m_2$  (см. рисунок), связанные пружиной жесткости  $k$ , могут двигаться без трения, по неподвижному кольцу радиуса  $r$ , лежащему в горизонтальной плоскости. Длина пружины в недеформированном состоянии равна  $\ell$ . Составить уравнения Лагранжа. Используя координаты  $\mathcal{Q}_1 = (\varphi_1 + \varphi_2)/2$  и  $\mathcal{Q}_2 = (\varphi_1 - \varphi_2)/2$ , найти закон движения в квадратурах.



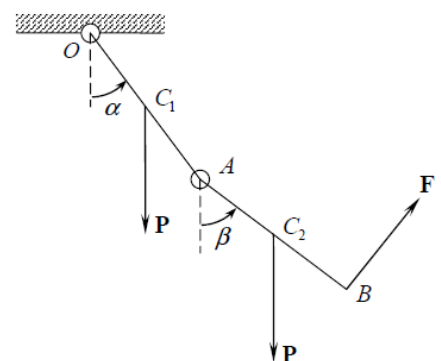
2. Определить форму кривой, которую приобретает нерастяжимая нить массы  $M$  и длины  $\ell$ , закреплённая на двух вертикальных опорах (см. рисунок). Как следует ориентировать боковые растяжки, чтобы моменты сил реакций, действующих на опоры, были равны нулю? Предельно допустимая сила натяжения растяжек равна  $F$ , высота опор –  $H$ , а расстояние между ними –  $L$ .



3. Однородный диск радиуса  $R$  и массы  $m$  (см. рисунок) может катиться без проскальзывания по параболе  $y = ax^2/2$ . Ось  $OY$  вертикальна,  $Ra \leq 1$ . Составить функцию Лагранжа, приняв за обобщенную координату абсциссу  $x$  точки касания. Получить уравнения Лагранжа.



4. Двойной маятник, состоящий из двух однородных стержней массы  $m$  и длины  $\ell$  каждый, может совершать движение в вертикальной плоскости (в точках  $A$  и  $O$  – цилиндрические шарниры). Помимо силы тяжести, действующей на стержни, к точке  $B$



- стержня  $AB$  приложена постоянная по величине перпендикулярная к стержню сила  $\mathbf{F}$  (см. рисунок). Определить положения равновесия.
5. Шарнирно закреплённая за один конец спица массы  $M$  может свободно вращаться в горизонтальной плоскости без трения. На спицу надета лёгкая пружина и бусинка массы  $m$ , прикреплённая к одному концу пружины. Второй конец пружины прикреплён к шарниру. В начальный момент пружина не натянута. Резким толчком спице сообщают угловую скорость  $\omega_0$ . Получить уравнения Эйлера – Лагранжа для этой системы. Описать движение бусинки и спицы. Длина нерастянутой пружины равна  $\ell_0$ .
  6. Используя оптико-механическую аналогию, найти траектории светового луча в среде с коэффициентом преломления  $n(x, y, z) = a(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/4}$ .

### РАЗДЕЛЫ III - IV (Законы сохранения, Малые колебания)

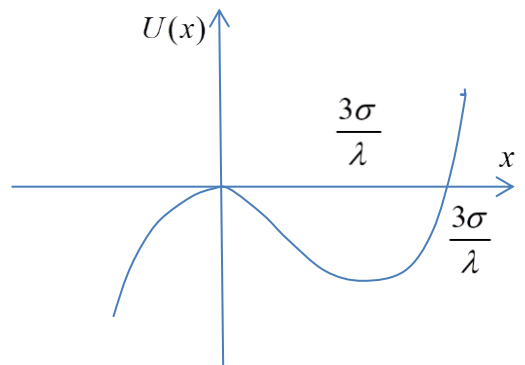
1. Определить период одномерного движения частицы массы  $m$  с энергией  $E$  в потенциальном поле вида  $U = -\frac{U_0}{\operatorname{ch}^2 \alpha x}$ ,  $(-U_0 < E < 0)$ .
2. Найти траекторию заряженной частицы с массой  $m$  и зарядом  $q$  в электрическом поле напряженности  $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos \omega t$ , если  $x(0) = 0$ ,  $y(0) = 0$ , а начальная скорость частицы  $\vec{V}_0$  перпендикулярна  $\vec{E}_0$ .
3. Проинтегрировать уравнения движения материальной точки массы  $m = 1$  в поле  $U(r) = 1/2r^2$ , для  $E > 0$ .
4. Найти закон движения частицы в поле  $U(x) = -Ax^4$ , если энергия ее равна нулю.
5. Указать условия финитности движения, найти точки поворота и период колебаний для материальной точки массы  $m = 1$  в поле:  $U(x) = x^2$ .
6. Проинтегрировать уравнение движения материальной точки массы  $m = 2$ , движущейся в поле  $U = -\operatorname{tg}^2 x$ , если при  $t = 0$   $x = 0$ ,  $\dot{x} = 2$ .
7. Найти точки поворота и исследовать характер движения материальной точки массы  $m = 1$ , движущейся в поле:  $U(r) = \frac{1}{2}r^2$ .
8. Найти точки поворота и исследовать характер движения материальной точки массы  $m = 1$ , движущейся в поле:  $U(r) = \left(\frac{1}{r^2} + r^2\right)\frac{1}{2}$ .
9. Найти точки поворота и исследовать характер движения материальной точки массы  $m = 1$ , движущейся в поле:  $U(r) = 1/r^4$ .
10. Определить траекторию частицы в поле  $U(r) = \frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{r^2}$ . Найти время падения частицы в центр поля с расстояния  $r_0$ . Сколько оборотов вокруг центра сделает при этом частица?
11. Найти точки поворота и исследовать характер движения материальной точки массы  $m = 1$ , движущейся в поле:  $U(r) = -\alpha^2 / 2r^2$ ,  $\alpha = \text{const}$ .
12. Мотоциклист увеличивает свою скорость сначала с 55 до 60 км/ч, а затем с 60 до 65 км/ч. Сравнить величины совершаемой при этом работы.

13. Каждый элемент бесконечно тонкого однородного неподвижного обруча радиуса  $R$  и общей массы  $M$  притягивает материальную точку  $P$ , лежащую на перпендикуляре к плоскости обруча, проходящем через его центр  $O$ . Силы притяжения описываются законом всемирного тяготения. Определить скорость, с которой материальная точка  $P$  пересечет плоскость обруча, если в начальный момент расстояние  $OP$  было равно  $\ell$ , а точка покоилась.
14. Однородную цепочку держат за верхний конец так, что нижним концом она касается стола, а затем отпускают. Показать, что в процессе падения цепочки сила давления на стол превышает вес лежащей на столе части цепочки в три раза.

15. Потенциальная энергия частицы  $U(x) = -\frac{\sigma x^2}{2} + \frac{\lambda x^3}{3!}$ . Начальные условия:

$$\dot{x}(0) = 0, x(0) = A, A = \frac{3\sigma}{\lambda}. \text{ Найти решение } x(t) \text{ уравнений движения.}$$

16. Космический аппарат находится на круговой орбите радиуса  $r_0$ . Найти величину тангенциального приращения скорости  $\delta v$  для перехода на эллиптическую орбиту с полуосью  $a > r_0$  и время перелёта до апогея новой орбиты.

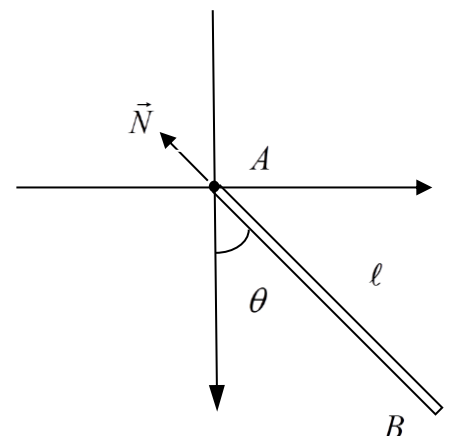
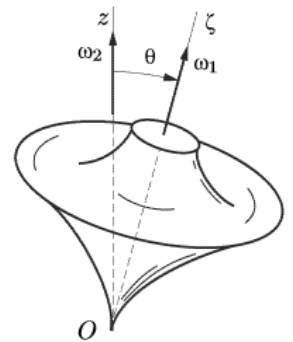


17. Найти скорость частицы после упругого столкновения с плоскостью, движущейся поступательно с постоянной скоростью. Ориентация плоскости и направления скоростей частицы и плоскости до столкновения произвольны.

## РАЗДЕЛЫ V

### (Уравнения движения твёрдого тела)

1. Юла (см. рисунок) вращается вокруг своей оси симметрии  $O\zeta$  с постоянной угловой скоростью  $\omega_1$ . Ось  $O\zeta$  равномерно вращается относительно вертикали  $Oz$  с угловой скоростью  $\omega_2$ , так что угол  $\theta$  остаётся постоянным (регулярная прецессия). Найти угловую скорость и угловое ускорение юлы относительно  $Oz$ .
2. При движении твёрдого тела заданы его угловая скорость  $\vec{\omega}_r$  и угловое ускорение  $\vec{\epsilon}_r$  относительно некоторой подвижной системы отсчета. Известны также угловая скорость  $\vec{\omega}_e$  и угловое ускорение  $\vec{\epsilon}_e$  этой подвижной системы отсчета относительно неподвижной. Определить угловую скорость  $\vec{\omega}$  и угловое ускорение  $\vec{\epsilon}$  тела.
3. Однородный стержень  $AB$  движется в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку  $A$ . Найти закон движения стержня и силы реакции, действующие со стороны оси.



## РАЗДЕЛ VI

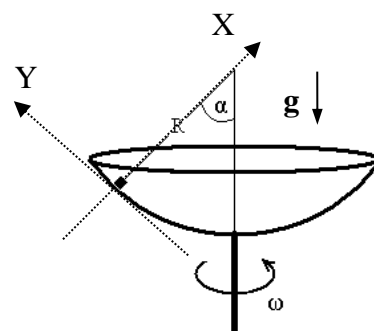
### (Неинерциальные системы отсчёта)

1. Найти решение уравнений движения маятника Фуко в окрестности положения равновесия. Указание: функция Лагранжа, записанная во вращающейся с угловой

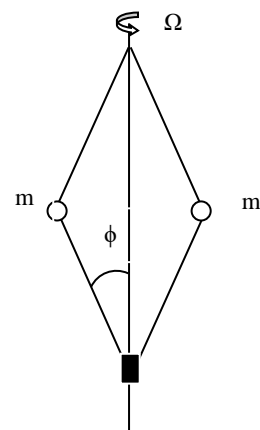
скоростью  $\vec{\Omega}$  системе координат, имеет вид:  $L = \frac{m(\vec{v} + \vec{\Omega} \times \vec{r})^2}{2} + m\vec{g} \cdot \vec{r}$ .

2. Однородный стержень  $AB = \ell$  может двигаться в вертикальной плоскости  $XY$  так, что конец  $A$  скользит по прямой  $OY$ , а конец  $B$  — по кривой  $y = f(x)$ . Плоскость  $XY$  вращается с постоянной угловой скоростью  $\Omega$  вокруг вертикальной оси  $OY$ . Трение в системе отсутствует. Какой должна быть функция  $f(x)$ , чтобы любое положение стержня было положением относительного равновесия, если  $f(0) = 0$ ?

3. Чашка насажена на вертикальную ось. Радиус сферической поверхности чашки  $R = 10$  см. Чашка может раскручиваться вокруг вертикальной оси. Маленькую шайбу массой  $m = 50$  г кладут на внутреннюю поверхность чашки. Положение шайбы относительно чашки задается углом  $\alpha$ . Если чашка не вращается, то шайба покоится в положениях, для которых  $\alpha < 20^\circ$ . Ускорение свободного падения  $g = 10$  Н/кг. Чему равен коэффициент трения покоя между шайбой и внутренней поверхностью чашки? Ответ округлите до сотых. Определить значение угловой скорости (в рад/с) вращения чашки, когда угол  $\alpha = 10^\circ$ , а шайба не будет двигаться относительно поверхности чашки, и при этом сила трения будет равна нулю. Ответ округлите до десятых.



4. Четыре стержня длины  $\ell$  и пренебрежимо малой массы шарнирно соединены с массами  $m$ , как показано на рисунке (центробежный регулятор скорости вращения). Система вращается с постоянной угловой скоростью  $\Omega$ . Массы слегка выводят из положения равновесия. Определить частоту малых колебаний системы. Масса муфты, свободно перемещающейся по оси вращения и шарнирно скреплённой со стержнями, равна  $M$ .



5. Тележка с закреплённым на ней математическим маятником удерживается на наклонной плоскости. Угол наклона плоскости равен  $\alpha$ . Тележку отпускают. Описать, как будет вести себя маятник в процессе скатывания тележки с наклонной плоскости. Длину маятника считать известной.

## РАЗДЕЛ VII

### (Основы канонического формализма)

1. Показать, что если для системы второго порядка  $\dot{q} = Q(q, p, t)$ ,  $\dot{p} = P(q, p, t)$  сохраняется «фазовый объём», то эта система является гамильтоновой, т.е. существует такая функция  $H(q, p, t)$ , что  $Q(q, p, t) = \frac{\partial H}{\partial p}$ ,  $P(q, p, t) = -\frac{\partial H}{\partial q}$ .

2. Материальная точка единичной массы движется по инерции вдоль оси  $Ox$ . На фазовой плоскости  $(x, p_x)$  выбирается область  $G_0$  — круг единичного радиуса.



Совокупность движений точки (с начальными условиями в  $G_0$ ) переводит  $G_0$  в  $G_t$ . Найти вид области  $G_t$  для произвольного момента времени  $t$ . Непосредственным вычислением убедиться в сохранении фазового объема.

3. Систему с гамильтонианом  $H = pq^3 / Vt$  подвергнуть преобразованию

$$\tilde{q} = \frac{1}{q^2} + \ln(tpq^3), \quad \tilde{p} = pq^3(1 + t \exp(1/q^2))$$

Убедиться, что это преобразование является каноническим. Найти гамильтониан преобразованной системы.

4. Для системы с одной степенью свободы скобки Пуассона функций  $H_1(q, p, t)$  и  $H_2(q, p, t)$  удовлетворяют соотношению  $\{H_1, H_2\} = 1$ . Показать, что если гамильтониан системы равен

a)  $H = H_1 + H_2$ ;    b)  $H = H_1 H_2$ ;  
 c)  $H = H_1 / H_2$ ;    d)  $H = H_1^2 + H_2^2$ ,

то общее решение соответствующей канонической системы уравнений можно найти, решив относительно  $q, p$  систему алгебраических уравнений:

a)  $H_1(q, p, t) = c_1 + t, \quad H_2(q, p, t) = c_2 - t$ ;  
 b)  $H_1(q, p, t) = c_1 e^t, \quad H_2(q, p, t) = c_2 e^{-t}$ ;  
 c)  $H_1(q, p, t) = c_1 \sqrt{2t + c_2}, \quad H_2(q, p, t) = \sqrt{2t + c_2}$ ;  
 d)  $H_1(q, p, t) = c_1 \sin(2t + c_2), \quad H_2(q, p, t) = c_1 \cos(2t + c_2)$ .

*Типовые вопросы к экзамену:*

1. Векторы. Операции над векторами. Кинематические характеристики движения материальной точки. Дифференцирование векторов. Тангенциальная и нормальная компоненты ускорения.
2. Сопровождающий репер. Репер Френе. Уравнения Френе – Серре. Кривизна и кручение – «внутренние» геометрические характеристики траектории. Примеры.
3. Системы ортогональных криволинейных координат. Коэффициенты Ламэ. Основная квадратичная форма в различных системах криволинейных ортогональных координат.
4. Основная задача механики для систем материальных точек. Связь с теоремой Коши. Примеры траекторий.
5. Центр масс системы материальных точек. Примеры нахождения центров масс твёрдых тел. Первый закон Ньютона для системы материальных точек.
6. Система двух материальных точек. Теорема о кинетической энергии системы двух тел. Классификация парных столкновений (ударов).
7. Экстремум функции нескольких переменных. Необходимое условие экстремума. Условный экстремум. Нахождение условного экстремума прямым методом и методом неопределённых множителей Лагранжа.
8. Понятие о вариационных методах механики. Цепная линия. Функционал и его первая вариация. Необходимое условие экстремума.
9. Степени свободы механической системы и обобщённые координаты. Примеры. Принцип наименьшего действия Гамильтона. Уравнения Лагранжа.
10. Функция Лагранжа и её свойства. Принцип относительности Галилея и функция Лагранжа свободной частицы.
11. Функция Лагранжа в криволинейных координатах – примеры механических систем. Функция Лагранжа системы взаимодействующих материальных точек.
12. Однородность пространства-времени и законы сохранения энергии и импульса.
13. Изотропность пространства и закон сохранения момента импульса замкнутой системы.

14. Импульс и момент импульса механической системы в разных инерциальных системах отсчёта. Теорема Кёнига.
15. Движение с одной степенью свободы. Сведение к квадратурам. Финитное движение. Период нелинейных колебаний и его зависимость от энергии.
16. Масштабные преобразования и теория подобия механических систем. Примеры.
17. Теорема о вириале и её применение.
18. Движение относительно неинерциальных систем отсчёта. Переносное ускорение. Кориолисово ускорение. Канонический и кинетический импульсы в неинерциальных системах отсчёта.
19. Задача двух тел. Сведение к задаче о движении одного тела в заданном потенциальном поле. Законы сохранения и сведение к квадратурам.
20. Угловая скорость как вектор. Момент импульса твёрдого тела. Момент инерции и уравнение движения свободного волчка.
21. Функция Гамильтона. Канонические уравнения. Примеры. Неособенные Лагранжианы.
22. Канонические преобразования. Производящая функция канонических преобразований. Фазовое пространство. Примеры.
23. Изменение физических величин со временем. Скобки Пуассона и их свойства. Сохранение физических величин. Теорема Пуассона.
24. Скобки Пуассона для канонически сопряжённых величин. Циклические переменные и интегрирование уравнений Гамильтона.
25. Простейшие колебательные системы. Понятие о нормальных координатах. Секулярное уравнение и собственные (нормальные) колебания.